COMPLÉMENTS DE PHYSIQUE

Développements limités

Introduction :

Au voisinage d'un point donné, il peut être intéressant de disposer d'une expression « simplifiée » d'une fonction, plus aisée à employer dans les calculs.

Pour une fonction dérivable, nous avons vu que $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$. Ceci est un **développement limité au premier ordre**, valable pour de petites variations. Si la dérivée s'annule, si l'on veut d'avantage de renseignements sur la fonction, cette approximation ne suffit plus.

Approximation d'une fonction par un polynôme :

Pour une fonction suffisamment régulière (dérivable n fois notamment), nous supposons que :

$$f(x) \approx a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{p=0}^{p=n} a_p (x - x_0)^p \quad \textbf{(formule de Taylor)}$$

Les coefficients peuvent se déterminer en examinant les dérivées successives en x_0. On a :

$$a_0 = f(x_0) ; a_1 = f'(x_0) ; a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

De façon plus générale : $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$

On retiendra notamment les **développements limités (D.L.)** suivants :

- $\exp(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \ldots \; si \; x \approx 0$
- $\sin(x) \approx x - \frac{1}{6} x^3 + \ldots \; si \; x \approx 0$
- $\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2} x^2 + \ldots \; si \; x \approx 0$
- $\ln(1 + x) \approx 1 + x - \ldots \; si \; x \approx 0$
- $\frac{1}{(1 + x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \; si \; x \approx 0$
- $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots$

Rigueur mathématique

(Tout cela n'est pas du ressort du cours de physique de PCSI, C'est pour information et pour mieux comprendre)

● On peut retenir que la formule de Taylor au rang n donne un résultat exact pour toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

● On peut également obtenir une expression du reste (écart entre la fonction et le D.L.) en intégrant par parties plusieurs fois l'expression $\int_{x_0}^{x} f'(y)\,dy=\int_{x_0}^{x} f'(y)\,d(y-x)$.

Par exemple, en intégrant une fois, on obtient : $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\,f'(x_0)-\int_{x_0}^{x}(y-x)\,f''(y)\,d(y-x)$. Le reste apparaît sous la forme d'une intégrale, que l'on peut parfois borner.

● Dans un grand nombre de situations, on sait démontrer la convergence, simple ou uniforme, du D.L. vers la fonction concernée.