

Complément

Interprétation statistique de l'entropie – système à deux niveaux

Le système

- N atomes identiques pouvant prendre l'énergie E_1 ou E_2 . On note n_1 et n_2 les populations correspondantes.
- Pour une énergie moyenne $U = n_1 E_1 + n_2 E_2$ donnée, le nombre d'états accessibles au système est $\frac{N!}{n_1! n_2!}$
- Formule de Stirling : $\ln p! \approx p \ln p - p$
- On prend E_1 comme zéro d'énergie : $n_2 = \frac{U}{E_2}$; $n_1 = N - \frac{U}{E_2}$
- $S = k_B \left(N \ln N - \frac{U}{E_2} \ln \frac{U}{E_2} - \left(N - \frac{U}{E_2} \right) \ln \left(N - \frac{U}{E_2} \right) \right)$

Lien entre U et T en découlant

- On a donc : $dS = k_B \left(\frac{-dU}{E_2} \ln \frac{U}{E_2} - dU + \frac{dU}{E_2} \ln \left(N - \frac{U}{E_2} \right) + dU \right) = \frac{k_B}{E_2} dU \left(\ln \left(\frac{NE_2 - U}{U} \right) \right)$
- $T = \frac{E_2}{k_B} \frac{1}{\ln \left(\frac{NE_2 - U}{U} \right)}$
- Ou bien si l'on inverse : $\frac{NE_2 - U}{U} = \exp \left(\frac{E_2}{k_B T} \right)$
- Soit $U = \frac{N E_2}{1 + \exp \left(\frac{N E_2}{k_B T} \right)} = \frac{N E_2 \exp \left(\frac{-N E_2}{k_B T} \right)}{1 + \exp \left(\frac{-N E_2}{k_B T} \right)}$

Lien avec la statistique de Boltzmann

- $p_2 = \exp \left(\frac{-N E_2}{k_B T} \right) / \left(1 + \exp \left(\frac{-N E_2}{k_B T} \right) \right)$ (probabilité de trouver un atome avec l'énergie E_2)

- $p_1 = \frac{1}{1 + \exp(\frac{N E_2}{k_B T})}$ (probabilité de trouver un atome avec l'énergie E_1)
- $U = N p_1 E_1 + N p_2 E_2 = N E_2 \exp\left(\frac{-N E_2}{k_B T}\right) : \text{on retrouve donc le résultat précédent.}$