

## **COMPLÉMENTS DE PHYSIQUE**

On étudie un mouvement à force centrale, dans le cas newtonien. On suppose que le point matériel de masse  $m$  tourne autour d'un centre de force immobile de masse  $m'$ .

### **Loi de force**

$$\mathbf{F} = \frac{-Gmm'}{r^2} \mathbf{e}_r$$

### **PFD en coordonnées polaires**

$$\text{Projection radiale : } m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = \frac{-Gmm'}{r^2}$$

$$\text{Projection orthoradiale : } m \left( r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2C = \frac{L}{m} \quad (\text{on peut retrouver ainsi la loi des aires})$$

### **Changement de variable**

$$\text{On pose } U = \frac{1}{r} . \text{ Le but est d'exprimer } r(\theta) .$$

### **Vitesse radiale**

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = - \left( \frac{L}{m} \right) \frac{du}{d\theta}$$

### **Accélération radiale**

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{dr}{dt} \right) = - \left( \frac{L}{m} \right)^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

On en déduit que :

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 r = - \left( \frac{L}{m} \right)^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \quad (\text{seconde formule de Binet})$$

### Énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right)$$

On en déduit que :

$$E_c = \frac{1}{2} m \left( \frac{L}{m} \right)^2 \left( \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) \quad (\text{première formule de Binet})$$

### Équation des trajectoires

On applique le PFD en projection radiale, avec la variable  $u$  :

$$- \left( \frac{L}{m} \right)^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = - G m' u^2 \quad (\text{on a simplifié par la masse } m \text{ de chaque côté})$$

Solution :  $u = G m' \left( \frac{m}{L} \right)^2 (1 + \epsilon \cos \theta)$  (on a choisi l'origine des angles).

$$r = \frac{\left( \frac{L}{m} \right)^2 \frac{1}{G m'}}{1 + \epsilon \cos \theta} = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

L'énergie mécanique correspondante est :

$$E_m = \frac{1}{2} m \left( \frac{L}{m} \right)^2 \left( (G m')^2 \left( \frac{m}{L} \right)^4 (\epsilon^2 \sin^2 \theta + (1 + \epsilon \cos \theta)^2) \right) - G m' \left( G m' \left( \frac{m}{L} \right)^2 (1 + \epsilon \cos \theta) \right)$$

Soit :

$$E_m = \frac{-G m m'}{2 r_0} (1 - \epsilon^2)$$

On remarque tout de suite, sans préjuger de la forme des trajectoires, que :

$$\begin{aligned} |\epsilon| > 1 &\Rightarrow r \text{ non borné, } E_m > 0 \\ |\epsilon| < 1 &\Rightarrow r \text{ borné, } E_m < 0 \end{aligned}$$

**Étude de la trajectoire (cas borné)**

On supposera par la suite que  $0 < \epsilon < 1$

- Le demi-grand axe de l'ellipse (direction  $\theta = 0$  ou  $\pi$ ) vaut :

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{r_0}{1-\epsilon} + \frac{r_0}{1+\epsilon} \right) = \frac{r_0}{1-\epsilon^2}$$

- Le demi-petit axe de l'ellipse se détermine en maximisant  $y = \frac{r_0 \sin \theta}{1 + \epsilon \cos \theta}$ . La valeur de l'angle correspondante est régie par :  $(1 + \epsilon \cos \theta) r_0 \cos \theta + r_0 \sin \theta \epsilon \sin \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = -\epsilon$

On obtient par conséquent  $b = \frac{r_0}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$

- L'excentricité de l'ellipse est  $\epsilon = 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2$

**Période**

L'aire de l'ellipse est  $\pi a b = \pi r_0^2 (1 - \epsilon^2)^{\frac{-3}{2}}$

La vitesse aréolaire est  $\frac{L}{2m}$ , par conséquent on doit avoir si T désigne la période du mouvement

$$T \frac{L}{2m} = \pi a b$$

On trouve que  $T^2 \left( \frac{L}{2m} \right)^2 = \pi^2 (ab)^2 = \pi^2 a^3 r_0 = \pi^2 a^3 \frac{\left( \frac{L}{m} \right)^2}{G m'}$ , il est facile d'en déduire la troisième

Loi de Képler :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G m'}{4 \pi^2} = C^{te}$$