

1. Compléments mathématiques :

1.1. Différentielle d'une fonction :

a) Définition :

Si on a une fonction $f(x, y, z, \dots)$, un accroissement infinitésimal de f lorsque les variables subissent des accroissements infinitésimaux est donné par sa différentielle :

$$df = A(x, y, z, \dots)dx + B(x, y, z, \dots)dy + C(x, y, z, \dots)dz + \dots$$

b) Comment trouver A, B, C ?

Pour trouver A, on imagine que seul x varie : $df = A dx$ dans ce cas, A est donc la dérivée de f relativement à x , les autres variables étant maintenues constantes.

Même chose avec y pour B, avec z pour C...

c) Exemples

- $f(x, y) = xy ; df = xdy + ydx$
- $f(x, y) = \frac{x^2}{y} ; df = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}$

1.2. Dérivées partielles :

a) Définition :

Pour une fonction de plusieurs variables $f(x, y, z, \dots)$, la dérivée de f relativement à une variable en maintenant les autres constantes est sa *dérivée partielle*.

Avec les notations ci-dessus, $A = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{df}{dx} \right)_{y, z, \dots}$

b) Exemples :

- $f(x, y) = \frac{y}{x} ; \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} ; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}$
- $f(x, y) = \exp(xy) ; \frac{\partial f}{\partial x} = y \exp(xy) ; \frac{\partial f}{\partial y} = x \exp(xy)$

c) Changement de variables et précautions :

- En physique, spécialement en thermodynamique, il se peut que l'on ait à manipuler

différents jeux de variables reliées entre-elles , par exemple, on peut décrire le comportement d'un gaz avec deux variables indépendantes prises parmi trois : P, T, V.

- Une grandeur fonction du couple (T,P) ne variera pas de la même façon exprimée avec un autre couple comme par exemple (T,V).
- Exemple simple : supposons que l'on considère une fonction $f(x, y) = x + y$. On s'intéresse aux variations de f avec les variables suivantes :

1) (x,y)

2) (x,u) où $u = x + y$, c'est à dire y (ancienne seconde variable) $= u - x$

3) (v,u) où $v = x - y$, c'est à dire $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$

On a :

1) $df = dx + dy = 1 dx + 1 dy$

2) $df = du = 0 dx + 1 du$

3) $df = du = 1 du + 0 dv$

En comparant 1) et 2), on remarque que : $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 1$ n'est pas égal à $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_u = 0$

En comparant 2) et 3), on remarque dans ce cas particulier que : $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v$

Lorsqu'il peut y voir ambiguïté, on indique par un indice quelles variables sont maintenues constantes lors de l'opération de dérivation partielle.

- Formule générale : pour un changement de variables $(x, y, z, \dots) \rightarrow (x_1, y_1, z_1, \dots)$, on a
- $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{y_1, z_1, \dots} = \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)_{y_1, z_1, \dots} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y, z, \dots} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_{y_1, z_1, \dots} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x, z, \dots} + \dots$$