DM N°3

L'objectif de ce DM, comme les deux précédents est de découvrir un sujet de concours, et de découvrir que vous êtes capables, même en début de CPGE, d'en traiter une partie.
La difficulté réside d'avantage dans la compréhension de l'énoncé que dans la réponse elle-même aux questions. Il s'agit d'optique et de thermodynamique, je vous propose un énoncé aménagé, abordable avec les notions qui sont, pour l'instant, les vôtres.
L'énoncé sous sa forme « complète » est celui du concours commun « Mines-Ponts », Physique-2 filière PC, année 2009. Vous le trouverez ici :

http://concours-minesponts.telecom-paristech.fr/pages/upload/sujet/sujet.php

Ce qui suit est l'énoncé aménagé, partiel et entrecoupé d'indications. Vous devez traiter toutes les questions. Il est conseillé de lire le présent document en entier avant de commencer.

Relativement à ce devoir de vacances, qui arrive en fin d'année et en période de festivités il est conseillé d'y passer du temps, de ne pas se décourager, et de s'y reprendre à plusieurs fois en laissant passer du temps entre. C'est pourquoi je vous le donne avant, pour une restitution le premier jour de la rentrée de janvier 2010

ÉNONCÉ AMÉNAGÉ

LE RAYON VERT

Le *rayon vert* est un phénomène lumineux qui se produit lors du coucher ou du lever du Soleil, lorsque certaines conditions atmosphériques sont réunies. S'il est aujourd'hui bien compris, ce phénomène naturel a alimenté au cours des âges les mythologies et inspiré la littérature. Selon les mythes scandinaves par exemple, celui qui observe ce « rayon », acquiert la capacité de lire dans le cœur des hommes. Jules Verne s'en est inspiré, dans un roman resté célèbre, paru en 1882 et intitulé tout simplement : le rayon vert.
Au début du XX^e siècle, les astronomes français André Danjon et Gilbert Rougier ont étudié le rayon vert et contribué à sa compréhension. Ils rapportent leurs propres observations, réalisées en 1920 du haut de la cathédrale de Strasbourg : « *Le rayon vert frappe toujours l'observateur par son apparition brusque, de caractère nettement tranché. Sitôt le disque du Soleil couché, on voit instantanément et sans transition un segment d'un vert très pur. [...] Il n'est pas rare de le voir durer jusqu'à 2 s.* »
On se propose d'étudier les phénomènes physiques à l'origine de la manifestation la plus fréquente du rayon vert. La propagation de la lumière dans un milieu non homogène fait l'objet d'une approche progressive qui s'appuie sur les fondamentaux relatifs aux milieux homogènes et aux lois de Descartes. Dans tout le problème :

- la Terre sera assimilée à une sphère de centre C, de rayon $R_T = 6370$ km et de masse $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg que l'on supposera à répartition sphérique.
- on négligera la variation de l'accélération due à la pesanteur $g_0 = 9,81$ m.s^{-2} avec la latitude et avec l'altitude.
- l'air sera assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 28,96$ g.mol^{-1}. On prendra pour valeur de la constante des gaz parfaits $R = 8,314$ J.mol^{-1}.K^{-1}.
- on distinguera dans la notation des unités, les secondes (") et minutes (') d'angle respectivement égales à 1/60 et 1/3600 de degré, des minutes (min) et secondes (s) d'heure.

I. — L'atmosphère terrestre

La variation de la masse volumique de l'air avec l'altitude joue un rôle primordial dans la formation du rayon vert. Il est donc nécessaire de préciser quelques-unes des propriétés physiques de l'atmosphère dans le cadre de différents modèles.

Pour les besoins de l'aéronautique, un modèle d'*atmosphère standard* a été défini en 1976. Il correspond à un profil moyen de températures (Fig.1) sous 40° de latitude nord, dont les gradients verticaux sont donnés pour différentes tranches d'altitudes dans le tableau ci-dessous. On supposera l'atmosphère standard en équilibre hydrostatique, la température et la pression au sol valant respectivement $T_0 = 288$ K et $p_0 = 1\,013$ hPa.

Couche	Altitude (km)	dT/dz (K.km^{-1})
Troposphère	0 - 11	- 6,5
Stratosphère	11 - 20	0
	20 - 32	+ 1,0
	32 - 47	+ 2,8
Mésosphère	47 - 51	0
	51 - 71	- 2,8
	71 - 86	- 2,0

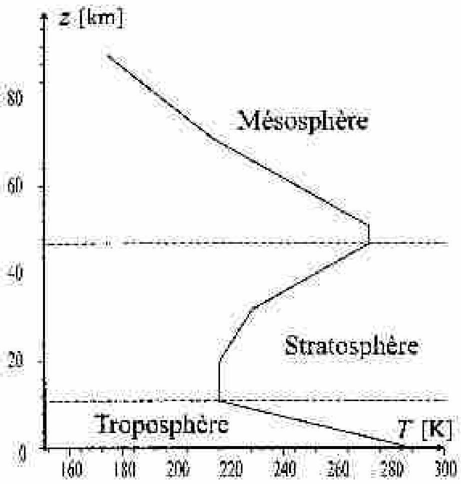

FIG. 1 – Atmosphère standard

I.A. — Atmosphère isentropique

Le brassage convectif de l'air dans la troposphère provoque des transformations locales isentropiques réversibles. On note $\gamma = c_p/c_v$ le rapport des capacités thermiques massiques à pression constante c_p et à volume constant c_v. Les constituants de l'air sont supposés être des molécules diatomiques rigides ($c_p = 7R/2$ et $c_v = 5R/2$). L'équilibre hydrostatique est atteint.

❑ 1 — Écrire la loi des gaz parfaits en fonction de la température $T(z)$, de la pression $p(z)$, de la masse volumique $\rho(z)$, de la masse molaire M de l'air à une altitude z et de toute autre constante nécessaire. Calculer numériquement la masse volumique ρ_0 de l'air au niveau du sol.

Pour ce qui suit, la loi de Laplace stipule que, si un gaz voit sa pression varier sans échanges de chaleur avec l'extérieur, et ce de façon réversible (« Très lentement »), alors la pression et le volume sont reliés par $P V^{\gamma} = C^{te}$; $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ est le rapport des capacités thermiques à pression et à volume constant.

En outre, pour les variations de pression avec l'altitude, une relation dite « relation fondamentale de la statique des fluides », traduisant l'équilibre hydrostatique, stipule que $\frac{dP}{dz} = -\rho g$.

❑ **2** — En utilisant la loi de Laplace relative à une transformation isentropique réversible, écrire la relation entre dp/dz et $d\rho/dz$. En écrivant la condition d'équilibre hydrostatique, déterminer dT/dz. En déduire que la température varie avec l'altitude selon la loi affine $T(z) = T_0(1 - z/H_s)$ où H_s est une constante que l'on déterminera. Calculer la valeur numérique de dT/dz et de H_s. Interpréter l'écart obtenu avec le gradient vertical de température donné par le modèle d'atmosphère standard.

❑ **3** — Exprimer $\rho(z)$ en fonction de ρ_0, H_s et γ.

I.B. — Atmosphère isotherme

L'accroissement de température dans la stratosphère résulte de l'absorption du rayonnement ultraviolet du Soleil par l'ozone qui atteint son maximum d'abondance dans cette région. La base de la stratosphère est supposée être à une température constante de valeur $T_s = 216,5$ K.

❑ **4** — À quelle équation différentielle satisfait $\rho(z)$ dans une région isotherme ? En déduire $\rho(z)$ en fonction de ρ_0 et H_t, l'*échelle de hauteur* sur laquelle ρ est divisée par $e = \exp 1$. Comment varie la hauteur d'une atmosphère isotherme avec sa température ? Calculer numériquement H_t.

I.C. — Atmosphère standard

Dans le modèle d'atmosphère standard (Fig.1), la température varie continûment avec l'altitude selon des lois affines du type $T(z) = T_k + zG_k$ où T_k et G_k sont des constantes dans une tranche k donnée d'altitudes.

❑ **5** — Montrer que $\rho(z)$ satisfait à l'équation différentielle $(T_k + zG_k)\frac{d\rho}{dz} + C_k\rho = 0$ où C_k est une constante que l'on déterminera en fonction de G_k, M, R et g_0. À la base de la tranche k considérée, d'altitude z_k, on note $\rho_k = \rho(z_k)$ la masse volumique de l'air. Résoudre cette équation différentielle et exprimer $\rho(z)$ en fonction de $\alpha_k = 1 + Mg_0/(RG_k)$, ρ_k, z_k, T_k et G_k.

II. — La réfraction atmosphérique

La *réfraction atmosphérique* est le changement de direction de propagation de la lumière d'un astre lorsqu'elle traverse l'atmosphère terrestre (Fig.2). L'air se comporte comme un milieu transparent d'indice de réfraction $n(z)$ qui varie avec l'altitude z. L'atmosphère est donc un milieu non homogène. On désigne par $n_0 = n(0) = 1,0002773$ l'indice de réfraction de l'air au niveau du sol à la longueur d'onde $\lambda_0 = 575$ nm dans le vide.

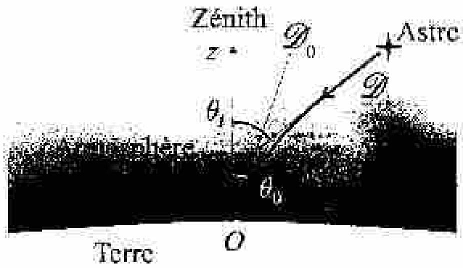

FIG. 2 – Réfraction atmosphérique

À une altitude élevée, lorsque l'atmosphère est suffisamment raréfiée, l'indice de l'air décroît jusqu'à tendre vers la valeur limite $n(\infty) = 1$. Le rayonnement incident de l'astre est supposé monochromatique de longueur d'onde λ_0. On rappelle que le *zénith* d'un lieu O d'observation est le point du ciel situé dans la direction de la verticale ascendante locale OZ. Dans le plan de la figure 2, on repère une direction $\mathscr{D}$ donnée, par l'*angle* appelé *distance zénithale*, que forme $\mathscr{D}$ avec OZ. Ainsi, l'angle de réfraction atmosphérique défini par $\psi_r = \theta_i - \theta_0$, est égal à la différence des distances zénithales θ_i de la direction réelle de l'astre et θ_0 de la direction dans laquelle il est observé en O.

❑ 8 — Énoncer les lois de Descartes relatives à la réfraction d'un rayon lumineux à la traversée d'un dioptre plan qui sépare deux milieux homogènes d'indices de réfraction n_1 et $n_2 > n_1$. Tracer la marche d'un rayon lumineux traversant ce dioptre. Calculer en degrés, l'angle maximum de réfraction i_m d'un rayon qui traverse un dioptre plan séparant le vide, d'un verre d'indice 1,5 (angle entre le rayon réfracté et la normale au dioptre).

II.A. — Réfraction atmosphérique au voisinage du zénith

On cherche à déterminer l'angle de réfraction atmosphérique de la lumière d'un astre observé au voisinage du zénith. La direction de la lumière incidente étant, dans ce cas, proche de la verticale locale, on peut négliger l'influence de la courbure de la Terre et considérer que l'atmosphère est constituée d'un ensemble de couches d'air planes d'indice $n(z)$ empilées les unes sur les autres (Fig.3-a).

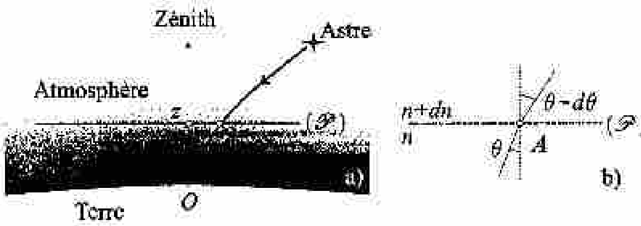

FIG. 3 – Réfraction atmosphérique au voisinage du zénith

L'altitude z d'une couche est identifiée à sa hauteur au dessus du sol. Le plan $(\mathscr{P})$ normal à OZ et passant par un point A du rayon lumineux, est un dioptre qui sépare localement deux milieux d'indices n et $n + dn$ (Fig.3-b). L'angle $\theta(z)$ est la distance zénithale de l'astre vue de A.

❑ 9 — Montrer que le long de la trajectoire du rayon lumineux, $n(z)\sin[\theta(z)]$ est une constante, que l'on notera C_1 et que l'on exprimera en fonction de n_0 et θ_0. Exprimer ψ_r en fonction de n_0 et $\theta_0 \approx \sin\theta_0$. En vérifiant la validité de l'expression que l'on utilisera, calculer, en seconde d'arc, l'angle de réfraction atmosphérique pour un astre observé à une distance zénithale de 10°.

II.B. — Réfraction atmosphérique aux grands angles

Pour les distances zénithales d'astres éloignés du zénith, il est nécessaire de tenir compte de la courbure de la Terre. L'atmosphère est désormais assimilée à un ensemble de couches d'air sphériques de centre C d'indice $n(z)$ empilées les unes sur les autres (Fig.4-a) ; l'altitude d'une couche de rayon r étant $z = r - R_T$.

L'angle $\theta(z)$ s'identifie désormais à la distance zénithale de l'astre observé en un point B sur la trajectoire du rayon tel que $CB = r$. Sur la figure 4-b le plan $(\mathscr{P}')$ tangent en B' à la sphère $(\mathscr{S}')$ de rayon $r + dr$ est un dioptre qui sépare localement deux milieux d'indices n et $n + dn$.

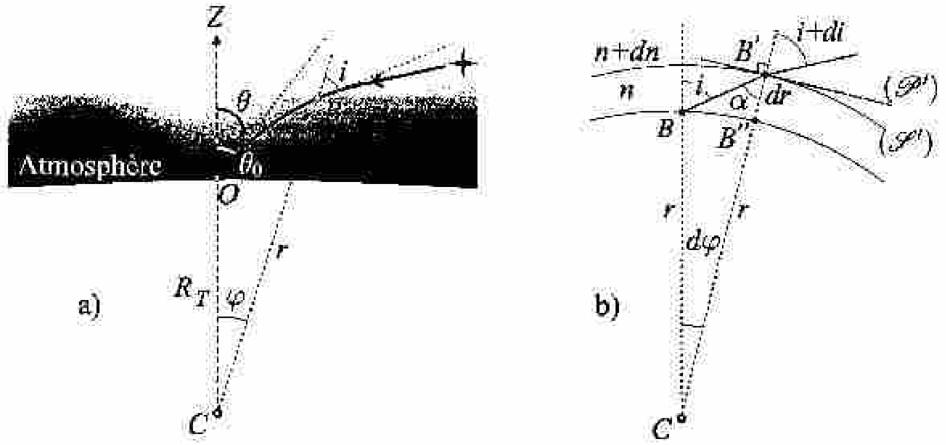

FIG. 4 – Réfraction atmosphérique aux grands angles

❑ **10** — En examinant le triangle $BB'C$, exprimer $\sin\alpha$ en fonction de $\sin i$, r et dr. Montrer que le long d'un rayon lumineux, la quantité $nr\sin i$ est une constante, que l'on notera C_2 et que l'on exprimera en fonction de n_0, R_T et θ_0.